ĐỀ THI HSG LỚP 9
VÒNG 2, QUẬN TÂN PHÚ
(2014-2015)

(NGÀY THI: 29/11/2014)

Bài 1: Cho a, b, c khác 0 và a + b+ c = 0. Hãy chứng minh:

$$\frac{a^4}{a^4-\left(b^2-c^2\right)^2}+\frac{b^4}{b^4-\left(c^2-a^2\right)^2}+\frac{c^4}{c^4-\left(a^2-b^2\right)^2}=\frac{3}{4}$$

Bài 2: Giải phương trình:

$$\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}\right)\left(2x+2\sqrt{x^2-x-2}-1\right)=8$$

Bài 3: Cho a, b dương. Hãy chứng minh: $\left(a+b\right)^2+\frac{a+b}{2}\ge 2a\sqrt{b}+2b\sqrt{a}$

Bài 4: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $A=\frac{2x+1}{x^2+2}$

Bài 5: Cho hình chữ nhật ABCD. Lấy M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Trên tia đối của tia DC lấy P, PM cắt AC tại Q. Chứng minh: MP.NQ = MQ.NP

Bài 6: Tìm cặp số nguyên sao cho tích của nó bằng 7 lần tổng.

❀ ❀ HẾT ❀ ❀

ĐỀ THI HSG LỚP 9 (Vòng 2)
Quận TÂN PHÚ – (2014-2015)
HƯỚNG DẪN

Bài 1: Cho a, b, c khác 0 và a + b + c = 0. Hãy chứng minh:

$$\frac{a^4}{a^4-(b^2-c^2)^2}+\frac{b^4}{b^4-(c^2-a^2)^2}+\frac{c^4}{c^4-(a^2-b^2)^2}=\frac{3}{4}$$

Ta có: a + b + c = 0 $\Leftrightarrow a+b=-c \Leftrightarrow (a+b)^3=(-c)^3 \Leftrightarrow a^3+b^3+3ab(a+b)=-c^3$

$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3=-3ab(a+b) \Leftrightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$ (do $a+b=-c$)

Ta có: a + b + c = 0

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=-c \\ b+c=-a \\ c+a=-b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2+2ab=c^2 \\ b^2+c^2+2bc=a^2 \\ c^2+a^2+2ca=b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2-c^2=-2ab \\ b^2+c^2-a^2=-2bc \\ c^2+a^2-b^2=-2ca \end{cases}$$

Ta có : $VT=\frac{a^4}{a^4-(b^2-c^2)^2}+\frac{b^4}{b^4-(c^2-a^2)^2}+\frac{c^4}{c^4-(a^2-b^2)^2}$

$$=\frac{a^4}{(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}+\frac{b^4}{(b^2-c^2+a^2)(b^2+c^2-a^2)}+\frac{c^4}{(c^2-a^2+b^2)(c^2+a^2-b^2)}$$

$$=\frac{a^4}{(-2ca)(-2ab)}+\frac{b^4}{(-2ab)(-2bc)}+\frac{c^4}{(-2bc)(-2ca)}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{3abc}{abc}\right)=\frac{3}{4}=VP$$

Vậy $\frac{a^4}{a^4-(b^2-c^2)^2}+\frac{b^4}{b^4-(c^2-a^2)^2}+\frac{c^4}{c^4-(a^2-b^2)^2}=\frac{3}{4}$

Bài 2: Giải phương trình:

$$\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}\right)\left(2x+2\sqrt{x^2-x-2}-1\right)=8$$

Điều kiện: $\begin{cases} x+1\ge 0 \\ x-2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ x\ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 2$

Ta có: $\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}\right)\left(2x+2\sqrt{x^2-x-2}-1\right)=8$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}\right)\left(x+1+2\sqrt{(x+1)(x-2)}+x+2\right)=8$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}\right)^2 = 8 \qquad \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}\right)^3 = 2^3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}+\sqrt{x-2} = 2$$

$$\Leftrightarrow x+1+2\sqrt{(x+1)(x-2)}+x-2 = 4$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x+1)(x-2)} = -2x+5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x+5 \ge 0 \\ 4(x+1)(x-2) = 4x^2-20x+25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le \frac{5}{2} \\ x = \frac{33}{16} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{33}{16} \text{ (nhận so với điều kiện } x \ge 2)$$

Vậy $S = \left\{\frac{33}{16}\right\}$

Bài 3: Cho a, b dương. Hãy chứng minh: $(a+b)^2 + \frac{a+b}{2} \ge 2a\sqrt{b} + 2b\sqrt{a}$

Ta có: $(a+b)^2 + \frac{a+b}{2} \ge 2a\sqrt{b} + 2b\sqrt{a}$

$$\Leftrightarrow (a+b)\left(a+b+\frac{1}{2}\right) \ge 2\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$\begin{cases} a+\frac{1}{4} \ge 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{4}} = \sqrt{a} \\ b+\frac{1}{4} \ge 2\sqrt{b\cdot\frac{1}{4}} = \sqrt{b} \end{cases} \Rightarrow a+\frac{1}{4}+b+\frac{1}{4} \ge \sqrt{a}+\sqrt{b} \Leftrightarrow a+b+\frac{1}{2} \ge \sqrt{a}+\sqrt{b} \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có: $a+b \ge 2\sqrt{ab} \quad (2)$

Từ (1) và (2), ta suy ra $(a+b)\left(a+b+\frac{1}{2}\right) \ge 2\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$

Vậy $(a+b)^2 + \frac{a+b}{2} \ge 2a\sqrt{b} + 2b\sqrt{a}$

Bài 4: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $A = \frac{2x+1}{x^2+2}$

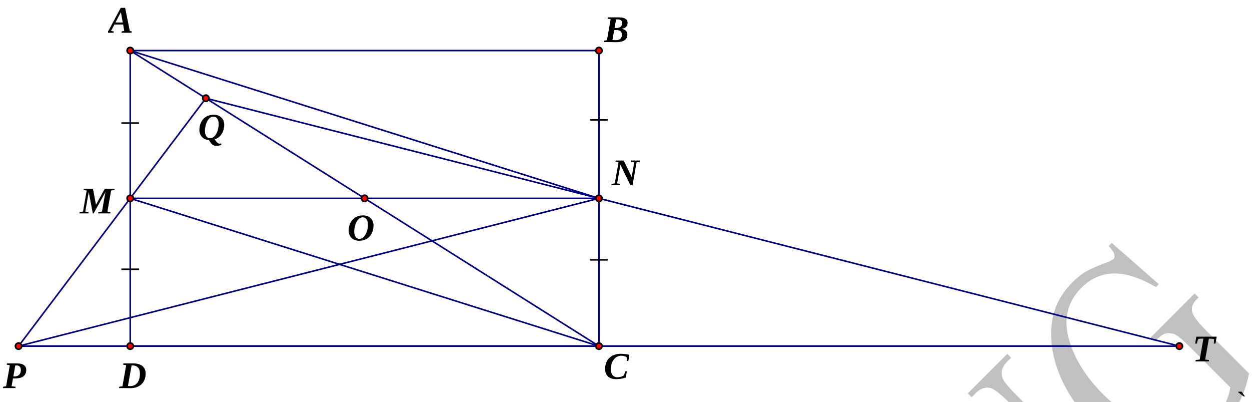
Ta có : $A - 1 = \frac{2x+1}{x^2+2} - 1 = \frac{2x+1-x^2-2}{x^2+2} = \frac{-x^2+2x-1}{x^2+2} = \frac{-(x-1)^2}{x^2+2} \le 0 \Leftrightarrow A \le 1$

Vậy $A_{max} = 1$. Dấu "=" xảy ra khi $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

Ta có : $A + \frac{1}{2} = \frac{2x+1}{x^2+2} + \frac{1}{2} = \frac{2(2x+1)+x^2+2}{2(x^2+2)} = \frac{x^2+4x+4}{2(x^2+2)} = \frac{(x+2)^2}{2(x^2+2)} \ge 0 \Leftrightarrow A \ge -\frac{1}{2}$

Vậy $A_{min} = -\frac{1}{2}$. Dấu "=" xảy ra khi $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$

<u>Bài 5:</u> Cho hình chữ nhật ABCD. Lấy M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Trên tia đối của tia DC lấy P, PM cắt AC tại Q. Chứng minh: MP.NQ = MQ.NP



Gọi T là giao điểm của QN và DC.

Gọi O là giao điểm của AC và MN.

Ta dễ chứng minh được tứ giác ANCM là hình bình hành. Do đó, O là trung điểm của MN.

Ta có: $\begin{cases} \dfrac{OM}{PC} = \dfrac{QO}{QC} \ (...) \\ \dfrac{ON}{CT} = \dfrac{QO}{QC} \ (...) \end{cases} \Rightarrow \dfrac{OM}{PC} = \dfrac{ON}{CT}$ **mà** $OM = ON \ (...)$ **nên PC = CT**

Do đó, ΔNPT **cân tại N.** $\Rightarrow NTP = NPT$

Mà $\begin{cases} MNP = NPT \text{ (2 góc so le trong và MN // PT)} \\ QNP = NTP \text{ (2 góc đồng vị và MN // PT)} \end{cases}$

nên $MNP = QNP$

$\Rightarrow$ **MN là đường phân giác của** $\Delta NPQ \Rightarrow \dfrac{MP}{MQ} = \dfrac{NP}{NQ}$ **(tính chất đường phân giác trong** ΔNPQ**)**

$\Rightarrow$ **MP.NQ = MQ.NP**

<u>Bài 6:</u> Tìm cặp số nguyên sao cho tích của nó bằng 7 lần tổng.

Gọi a, b là 2 số cần tìm ($a, b \in Z$ **)**

Theo đề bài, ta có: ab = 7(a+b) $\Leftrightarrow (a-7)(b-7) = 49$

Do a, b là 2 số nguyên nên ta có bảng sau:

a – 7	1	-1	49	-49	7	-7
b – 7	49	-49	1	-1	7	-7
A	8	6	56	-42	14	0
B	56	-42	8	6	14	0

Vậy các cặp số nguyên cần tìm là: (8;56), (56;8), (6;-42), (-42;6), (14;14), (0;0)

❀ ❀ HẾT ❀ ❀